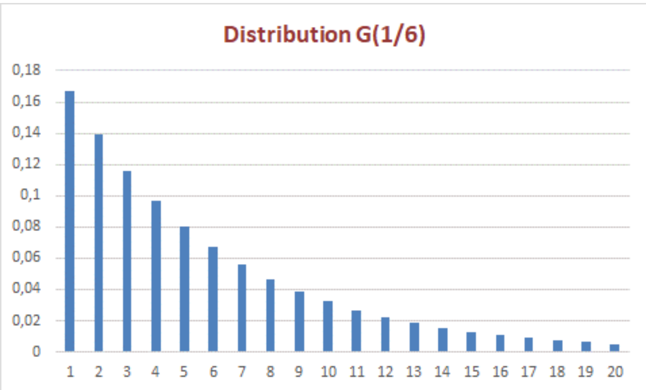
Loi géométrique, lois à densité

1. Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$.
On répète cette épreuve de façon identique et indépendante **jusqu'à obtenir le premier succès**.
Le nombre d'épreuves n'est donc pas fixé à l'avance, c'est pourquoi il ne s'agit pas d'une loi binomiale.
On note X la v.a. qui représente le rang du premier succès (nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès).

Définition 8.1 On dit que la v.a. X suit une *loi géométrique* de paramètre p. On pose $q = 1 - p$
On a alors :

$$P(X = k) = p \times q^{k-1} \text{ et } P(X \leqslant k) = p \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



Propriété 8.1 Si X suit une *loi géométrique* de paramètre p, on a :

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \sigma(X) = \frac{q}{p}$$

Comme les épreuves sont indépendantes, il y a autant de chances d'avoir un succès au troisième essai en ayant déjà joué 4 fois que de chances d'avoir un succès au troisième essai en commençant à peine à jouer. On dit que la loi géométrique est **sans mémoire**.

Propriété 8.2 Pour tous entiers naturels n et m, on a :

$$P_{(X>m)}(X > m + n) = P(X > n)$$

Exercice 8.1 On considère une v.a. X qui suit la loi géométrique de paramètre 0.3.

1. Calculer les probabilités : $P(X = 4)$, $P(X \leqslant 2)$, et $P(X > 3)$. On arrondira les résultats au millième.
   ....
   ....
   ....

. . . .
. . . .
. . . .

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
   . . . .
   . . . .
   . . . .

Exercice 8.2 On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité "d'obtenir pile" est 0.75.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour "obtenir pile".

1. Quelle est la loi de X et quel est son paramètre ?
   . . . .
   . . . .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au premier lancer ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois face, et ensuite pile ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
4. Si on répète un grand nombre de fois l'expérience, à quel lancer apparaîtra "pile" pour la première fois, en moyenne ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
5. Pile n'est pas apparu lors des deux premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il n'apparaisse pas lors du prochain lancer ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

Exercice 8.3 Un client cherche à joindre par téléphone l'assistance technique de son fournisseur d'accès.
On estime que la probabilité que son appel soit pris sans attente est de 0.2.
Si son appel n'est pas pris sans attente, le client raccroche son téléphone et rappelle, autant de fois que nécessaire jusqu'à joindre un technicien.
On suppose que les appels sont indépendants les uns des autres.
On note T la v.a. égale au rang de son premier appel pris sans attente.

1. Quelle est la loi de probabilité de T ? Justifier.
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
2. Calculer $P(T = 3)$.
   . . . .
   . . . .
   . . . .
3. Quelle est la probabilité que le client doive effectuer plus de deux appels pour joindre le service technique ?
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .
   . . . .

4. Déterminer l'espérance de la v.a. T et interpréter ce résultat.

5. Le client a déjà effectué deux appels infructueux. Quelle est la probabilité qu'il doive en passer de nouveau deux ?

Exercice 8.4 On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un métro à une station est modélisé par une v.a. T qui suit une loi géométrique. Le temps d'attente moyen pour le métro est de 3 minutes.

1. Quel est le paramètre de la loi géométrique pour cette ligne ?

2. Quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 3 minutes une rame de cette ligne ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 5 minutes ?

Exercice 8.5 Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte dans le noir (il a perdu sa lampe !). Il est équipé d'un trousseau de 10 clefs dont une seule ouvre la porte.
Soit X la v.a. qui dénombre le nombre de clefs essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre.
Les clefs n'étant pas différenciées, il choisit à chaque essai une clef au hasard dans son trousseau.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser son paramètre.

2. Quelle est la probabilité que le veilleur ouvre la porte au premier essai ?

3. Déterminer $P(X > 2)$. Interpréter.
....
....
....
....
....
....
....
....

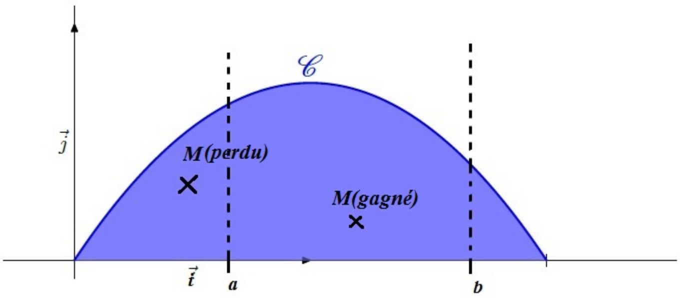
4. Calculer $P_{X>5}(X > 8)$. Interpréter ce résultat.
....
....
....
....
....
....
....
....

5. On considère désormais que le veilleur de nuit teste une clef puis met la clef testée dans sa poche. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte lors du troisième essai ? On pourra s'aider d'un arbre.
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Lois de probabilités continues

A. Un exemple

Dans le plan, on délimite la zone colorée ci-dessous comprise entre les abscisses 0 et 2, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f continue sur $[0;2]$.
La fonction f est choisie de telle manière que cette zone a pour aire $1u.a.$.



Un jeu consiste à choisir deux nombres a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2$. Puis un ordinateur désigne au hasard un point M de la zone colorée. On gagne si l'abscisse x_M du point M est entre a et b. La probabilité de gagner est donc la probabilité que l'intervalle $[a;b]$ contienne x_M.
En notant $\mathscr{A}_{a,b}$ l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, on a donc :
$P(\ll \text{ gagné } \gg) = P([a;b]) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\mathscr{A}_{a,b}}{\mathscr{A}_{totale}} = \frac{\mathscr{A}_{a,b}}{1} = \mathscr{A}_{a,b} = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Dans ce cas, on dit que la fonction f est une fonction *densité de probabilité*.

B. Densité de probabilité

Définition 8.2 On dit qu'une variable aléatoire X est *continue* si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 8.1 La durée de vie d'une ampoule électrique, le temps d'attente à un guichet, etc. sont des varaibles aléatoires *continues*.
En revanche, le nombre obtenu en tirant un dé ne l'est pas (X ne peut pas prendre la valeur $1,65$, mais seulement les valeurs $1,2,3,4,5,6$: on dit alors que la variable aléatoire est *discrète*.

Définition 8.3 Une fonction f est une *densité de probabilité* d'une loi de probabilité sur un intervalle $I=[c;d]$ ssi f vérifie les conditions suivantes :

- f est continue et positive sur I
- on a $\displaystyle\int_c^d f(x)\mathrm{d}x = 1$

Propriété 8.3 Soit X une variable aléatoire continue définie sur un intervalle I dont la densité de probabilité est la fonction f. Alors pour tout $a,b \in I$ t.q. $a \leqslant b$, on a :

$$P(X\in[a;b]) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire que $P([a;b])$ est l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Remarque 8.1 (Conséquence)
Pour tout $a\in I$, on a $P(X=a)=0$.
Ceci peut paraître surprenant, mais prenons l'exemple de la variable aléatoire égale à la durée de vie d'une voiture. Celle-ci suit une loi continue sur $\mathbb{R}_+$. Si on se fixe une durée, disons 5 ans, la probabilité que la durée de vie de la voiture soit égale à 5 ans est donc nulle !
Ceci est moins surprenant si on considère qu'une durée de 5 ans (dont une années bissextile) est égale à 157 766 400 secondes ; en effet, la probabilité que la voiture « vive » *exactement* cette durée est proche de 0 (en passant aux dixièmes voire aux centièmes de seconde, c'est encore plus parlant...)

Définition 8.4 Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire X sur un intervalle $[c;d]$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_c^d tf(t)\mathrm{d}t$ existe, on dit que c'est *l'espérance* de la variable aléatoire X.
On note :

$$E(X) = \int_c^d tf(t)\mathrm{d}t$$

On peut rapprocher cette définition de celle de l'espérance d'une v.a. discrète (Cf. cours de 1ère S) : $E=\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i$; où ici t joue le rôle de x_i et $f(t)$ celui de p_i, et où l'intégrale remplace le sigma.

Définition 8.5 La **fonction de répartition** de la variable aléatoire X est la fonction F qui, à tout réel $x\in[a;b]$ associe la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à x :

$$F(x) = P(X\leqslant x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

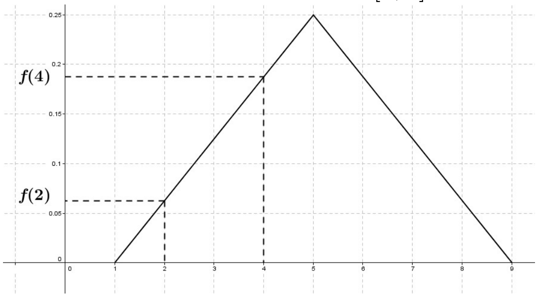
F est ainsi la primitive de f qui s'annule en a.
On en déduit que, pour tous réels c et d ($c\leqslant d$) de l'intervalle $[ja;b]$:

$$P(c\leqslant X\leqslant d) = F(d)-F(c) = P(X\leqslant d) - P(X\leqslant c)$$

Exercice 8.6 Montrer que la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est une densité de probabilité sur $[-1;1]$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 8.7 On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une densité f de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur $[1;9]$.



En remarquant que $f(2) = \frac{0{,}25}{4} = 0,0625$, que $f(4) = \frac{0{,}25}{4} \times 3 = 0,1875$ et en utilisant la formule de calcul de l'aire du trapèze, soit $\mathscr{A} = \frac{\text{petite base+grande base}}{2} \times$ hauteur, déterminer par des considérations géométriques :

1. $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$

....
....
....
....
....
....
....
....

2. $P(X > 4)$

....
....
....
....
....
....
....
....

C. La loi uniforme

On a vu en première la loi uniforme *discrète* : c'est celle qui décrit toutes les situations d'*équiprobabilité*.
Intuitivement, la loi uniforme continue caractérise aussi une situation d'équiprobabilité : les probabilités de deux intervalles de même amplitude sont égales.
On obtient ainsi une v.a. dont la *densité de probabilité* est une *fonction constante*.

Exemple 8.2 Un procédé permet de choisir au hasard un nombre réel entre 0 et 1. Un joueur choisit préalablement un intervalle $[m;M]$ inclus dans $[0;1]$ (i.e. $0 \leqslant m \leqslant M \leqslant 1$).
La probabilité que le nombre choisi au hasard appartienne à $[m;M]$ est égale à $P([m;M]) = \frac{M-m}{1-0}$.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre tiré au hasard, on dit que X suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0;1]$.

Définition 8.6 (et propriété)
Une variable aléatoire X à valeurs dans $[a;b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) suit une loi uniforme continue sur $[a;b]$, notée $\mathscr{U}_{[a;b]}$ ssi X est une variable continue dont la densité f est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien une v.a. dont la *densité de probabilité* est une *fonction constante*.

Propriété 8.4 Si X est une v.a. suivant une loi uniforme $\mathscr{U}_{[a;b]}$ (avec $a \neq b$), alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration $E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

Méthode - Calcul de probabilités avec la loi uniforme.
Si X suit une loi uniforme sur $[a;b]$, on a pour $a \leqslant m \leqslant M \leqslant b$:

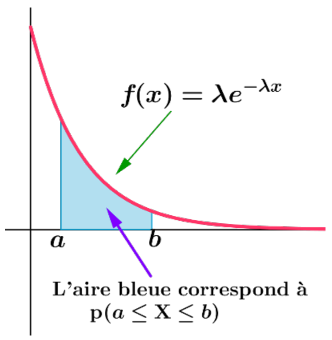
$$P(m < X < M) = \int_m^M f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_m^M = \frac{M-m}{b-a}$$

Exercice 8.8 (Voir la méthode page 68). Martin arrive tous les matins entre 7h15 et 7h35 à son arrêt de bus. On considère que son heure d'arrivée à cet arrêt est une variable aléatoire suivant une loi uniforme, notée X, sur $[15;35]$. Le bus qu'il attend passe à 7h, puis toutes les dix minutes précisément, et ce jusqu'à 8h.

1. Quelle est la probabilité que martin attende moins de 5 min le prochain bus ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. S'il rate le bus de 7h30, Martin arrive en retard à l'école. Quelle est la probabilité que Martin soit en retard à l'école ?
   ....
   ....
   ....
   ....

D. La loi exponentielle

La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si on suppose que la durée de vie ne dépend pas du temps pendant lequel l'appareil a déjà fonctionné on dit que la durée de vie est *sans vieillissement*. On démontre alors et nous admettrons que la loi de probabilité de X est la loi exponentielle de paramètre λ définie ci-après.



Définition 8.7 (et théorème) On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue admettant pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration On a f continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\int_0^\mu f(t)\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^\mu = -\mathrm{e}^{-\lambda\mu} + 1$$

Or $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\mu} = 0$ donc f est bien une fonction densité de probabilité.

Méthode - Calcul de probabilités avec la loi exponentielle.

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b$$

Cas particuliers :

- Calcul de $P(X \leqslant k)$.
  $P(X \leqslant k) = P(0 \leqslant X \leqslant k)$ car la densité de la loi exponentielle est définie sur $\mathbb{R}_+$
- Calcul de $P(X \geqslant k)$.
  $P(X \geqslant k) = \displaystyle\int_k^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$, on a une *intégrale généralisée* : l'une des bornes est infinie.
  On admet que $\displaystyle\int_k^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{s\to+\infty}\int_k^s \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim_{s\to+\infty}\left[-e^{-\lambda x}\right]_k^{+\infty}$

Propriété 8.5 Une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) vérifie la propriété de *durée de vie sans vieillissement* :
Pour tout réels t, h positifs, on a : $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$

Démonstration Pour tous réels positifs t et h :
$P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$ et $P((T \geqslant t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$.
$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \frac{P[(T\geqslant t)\cap(T\geqslant t+h)]}{P(T\geqslant t)} = \frac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geqslant h)$

Remarque 8.2 Soit un appareil dont la durée de vie suit une variable aléatoire continue X. On appelle *demi-vie* de cet appareil la durée x telle que $P(X < x) = \frac{1}{2}$.

Définition 8.8 L'espérance d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ est définie par la limite suivante :

$$E(T) = \lim_{s\to+\infty}\int_0^s t\times\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

Propriété 8.6 L'espérance d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration On souhaite calculer, pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t\times\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$. Pour cela, nous allons chercher une primitive de $t \mapsto te^{-\lambda t}$, dont nous soupçonnons qu'elle est de la forme $F(t) = (at+b)e^{-\lambda t}$. On cherche donc a et b :
Pour $t > 0$, on a $F'(t) = ae^{-\lambda t} + (at+b)\times(-\lambda)e^{-\lambda t} = (-\lambda at + a - \lambda b)e^{-\lambda t}$.
On cherche donc a et b tels que : $\begin{cases} a - \lambda b = 0 \\ -\lambda a = 1 \end{cases}$

On a donc $a = -\frac{1}{\lambda}$ et $b = -\frac{1}{\lambda^2}$.
Il vient :
$$\int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\frac{\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} - 1}{\lambda}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda x e^{-\lambda x}) = 0$ car $\lambda > 0$.
De même $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-\lambda x}) = 0$, donc la limite lorsque $x \to +\infty$ de l'intégrale précédente est bien égale à $\frac{1}{\lambda}$.

<u>Exercice</u> 8.9 (Voir la méthode page 69). La durée X (en heures) d'un match de tennis suit la loi exponentielle de paramètre $0,34$. Quelle est la probabilité que le match dure plus de 5 heures ?

....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Exercice</u> 8.10 (Voir la méthode page 69).Soit X une variable aléatoire exponentielle dont la densité est telle que $P(X \leqslant 3) = \frac{2}{3}$. Déterminer la densité de probabilité de X, son espérance, et calculer $P_{(X\geqslant 2)}(X \geqslant 5)$ (utiliser la propriété 8.5).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Exercice</u> 8.11 On cherche dans le problème suivant à décrire la loi de la variable aléatoire X de densité f sur $[0;+\infty[$, représentant la durée de vie d'un noyau radioactif. Les données expérimentales ont mis en évidence les résultats suivants :

- tous les noyaux ont une durée de vie qui suit la même loi
- la mort d'un noyau est indépendante de celle des autres noyaux
- pour tous t et h dans $[0;+\infty[$, on a $P_{(X\geqslant t)}(t \leqslant X \leqslant t+h) = P(X \leqslant h)$

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(t) = P(X \leqslant t)$.

Partie A - Étude théorique

1. Interpréter, en termes de durée de vie, le résultat : $P_{(X\geqslant t)}(t \leqslant X \leqslant t+h) = P(X \leqslant h)$
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Démontrer que , pour tous a et b dans $[0;+\infty[$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$, et $P(X \geqslant a) = 1 - F(a)$ [1]
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

1. L'égalité $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$ est vraie pour toutes les lois à densité.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. En déduire que, pour tous t et h dans $[0;+\infty[$: $F(t+h)-F(t)=F(h)\times(1-F(t))$
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. On considère maintenant la fonction G définie sur $[0;+\infty[$ par $G(t)=1-F(t)$.
Montrer que G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. Démontrer que, pour tous t et h dans $[0;+\infty[$, $G(t+h)=G(t)\times G(h)$
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. En déduire qu'il existe un réel λ tel que, pour tout t dans $[0;+\infty[$, $F(t)=1-e^{-\lambda t}$. *
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. Montrer que $\lambda>0$, et en déduire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

* On pourra évoquer le fait que les fonction exponentielles sont les seules qui vérifient l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

Partie B - Application

On considère un noyau radioactif de carbone 14. sa durée de vie X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1,21.10^{-4}$, où λ est appelée la constante radioactive par unité de temps, ici en années.

1. Calculer $P(X \geqslant 1000)$ et interpréter ce résultat
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Déterminer la réel t tel que $P(X \geqslant t) = P(X \leqslant t)$. Ce réel t est appelé période radioactive ou *demi-vie* du noyau radioactif.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 8.12 *La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B*

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right).$$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Partie B

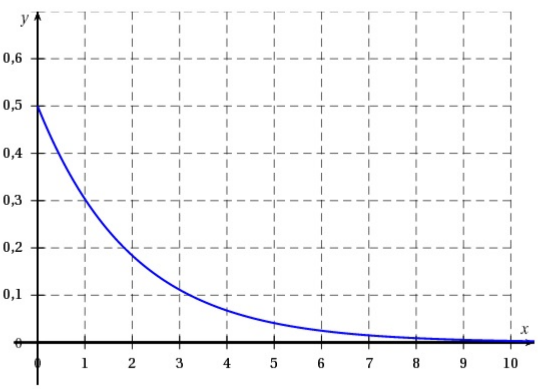
La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (ci-contre) :

   (a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

   (b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

ANNEXE 2



2. On suppose que $E(X) = 2$.

   (a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

   ....

   ....

   ....

   (b) Calculer la valeur de λ.

   ....

   ....

   ....

   (c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près.
   Interpréter ce résultat.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

   ....

   ....

   ....

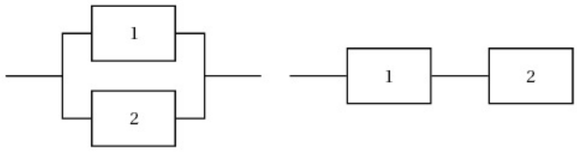
   ....

   ....

   ....

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés ≪ en parallèle ≫, le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Lorsque les deux composants sont montés ≪ en série ≫, le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.
   ....
   ....
   ....
   ....